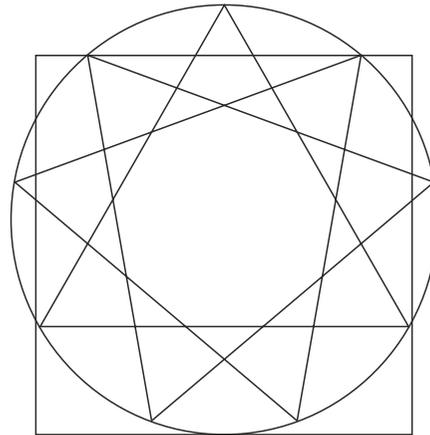
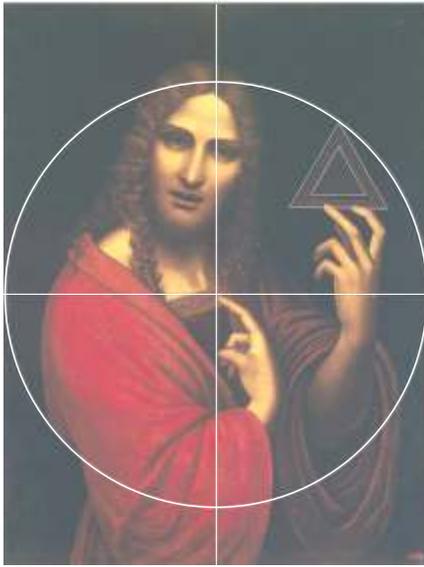


Geometrische Formgebung und die Quadratur des Kreises, untersucht an zwei Werken Leonardo da Vincis



Paul M. Arnold
im Jubiläumsjahr 2019



Giampietrino (Schüler Leonardos): Christus mit Dreifaltigkeitssymbol, Eremitage. Der Fingerzeig Christi verweist auf den faktischen wie symbolischen Zirkelpunkt, das Winkeldreieck auf die Trinität aber auch auf die Geometrie des Bildaufbaus.

Einführung

Leonardo da Vinci, der „uomo universale“ war auch Experte in Sachen Geometrie – seine Skizzenbücher und Texte zeugen davon. Er war Schüler und Freund des führenden italienischen Mathematikers Luca Pacioli, und hat dessen Werk „de divina proportione“ illustriert – auch Albrecht Dürer¹ hat davon profitiert. Der darin unter anderem propagierte „Goldene Schnitt“ wird heute allerdings in seiner praktischen Anwendung an Kunstwerken eher überbewertet. Ein weiterer, nicht zu unterschätzender Schwerpunkt Paciolis galt der Kreisquadratur, und so bezeichnet er es auch als Intention der Alten, alle Maße aus dem Menschen zu gewinnen, wobei sie: „... die beiden Hauptfiguren, ohne welche kein Kunstwerk gelingen kann, nämlich den vollkommenen Kreis und das Quadrat ...“ verwendet hätten – nach Vitruvs Anweisung².

Zunächst soll Leonardos weithin bekannte Zeichnung des „Vitruvianischen Mannes“ untersucht werden. Obwohl diese Präsentation eines Mannes in Kreis und Quadrat die „Quadratur des Kreises“ geradezu heraufzubeschwören scheint, gab es in der unübersehbaren

Literatur zu diesem Werk anscheinend keinen ernsthaften Versuch dieser Spur zu folgen – wohl auch dem Umstand geschuldet, dass Kreis und Quadrat sich hier nicht einmal vage annähernd als flächengleich erweisen. 1998 hat sich Klaus Schröer³ der Herausforderung gestellt und den in dieser Zeichnung enthaltenen Algorithmus der Kreisquadratur mit spektakulären Resultaten entschlüsselt.

Mein Ansatz der Untersuchung dieser Werke war zunächst ein anderer: Nach langjähriger Forschung an Kunstwerken der Spätgotik und Renaissance sehe ich den Einsatz oft komplexer Systeme aus (Stern-) Polygonen als probates zeitübliches Mittel, Maß und Form im Werk zu finden. Die Verwendung solcher geometrischer „Grundlagen“ (analog den „Maßgründen“ der Bauhüttenmeister) bewirkte die Nobilitierung des bloßen Handwerks zur Kunst – denn als Kunst galten nur die sieben freien Künste, deren eine eben die Geometrie war.

Über der praktischen Nutzung der geometrischen Grundformen und (Stern-) Polygone zur Proportionierung und Formgebung oder eine rein artistisch-mathematische Beschäftigung mit ihnen darf man ihre – manchmal mehrdeutige – symbolhafte Bedeutung, nicht übersehen. Unter anderem steht etwa das Quadrat für die Welt (die vier Himmelsrichtungen), der Kreis für die unendliche Himmelskugel, das gleichseitige Dreieck für die Trinität, das Pentagramm für den Menschensohn Christus (fünf Wundmale), das Hexagramm, auch „Stern Davids“ für die Verbindung von oben und unten, männlich und weiblich, der Siebenstern für die Gaben des Heiligen Geistes, der Achtort für Christus (das „Weltquadrat“ verbindet sich mit dem um 45° gekippten „Kreuzquadrat“), der Neunstern für die drei mal heilige Dreifaltigkeit und die neun Chöre der Engel, der Zehnstern für den auf der Erde inkarnierten Menschensohn (Pentagramm nach oben und untenweisend), der Zwölfstern für die himmlische Vollkommenheit, da sich Dreieck und Quadrat in ihm vereinen. Ein philosophisches Ideal ist die „symmetria“ (damals im Wortsinn = Zusammenmaßung) gegensätzlicher geometrischer Elemente analog der „coincidentia oppositorum“ des Cusanus – dem „Ineinsfall“ der Gegensätzlichkeiten zur göttlichen Einheit. Nicht zuletzt dieser Gedanke mag auch

das große Interesse damaliger Gelehrter und Künstler an der „Quadratur des Kreises“ erklären.

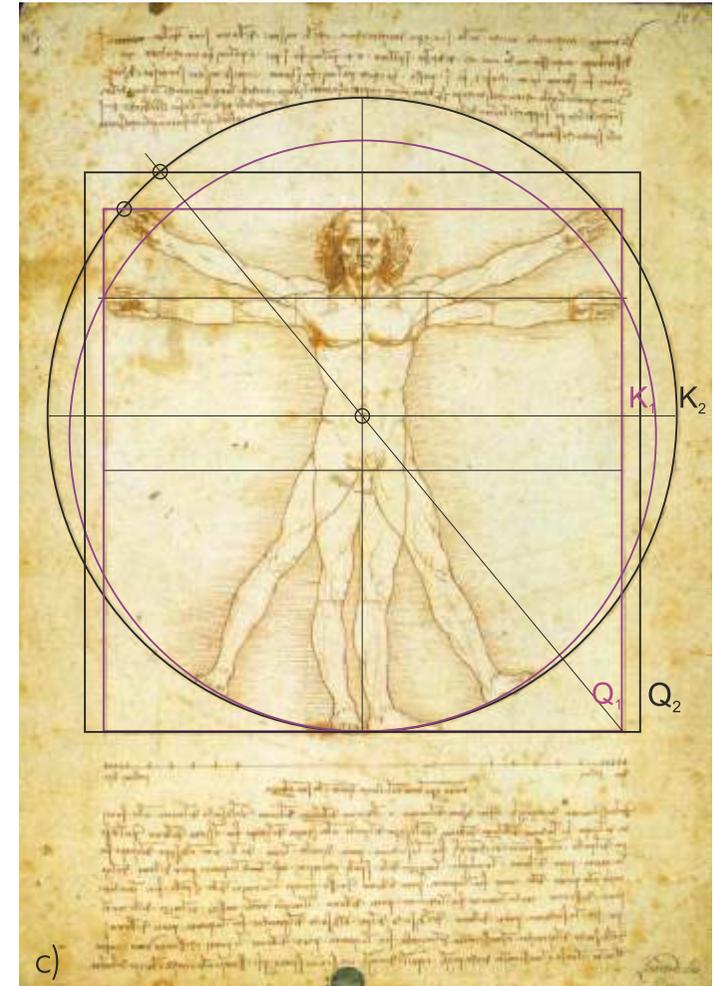
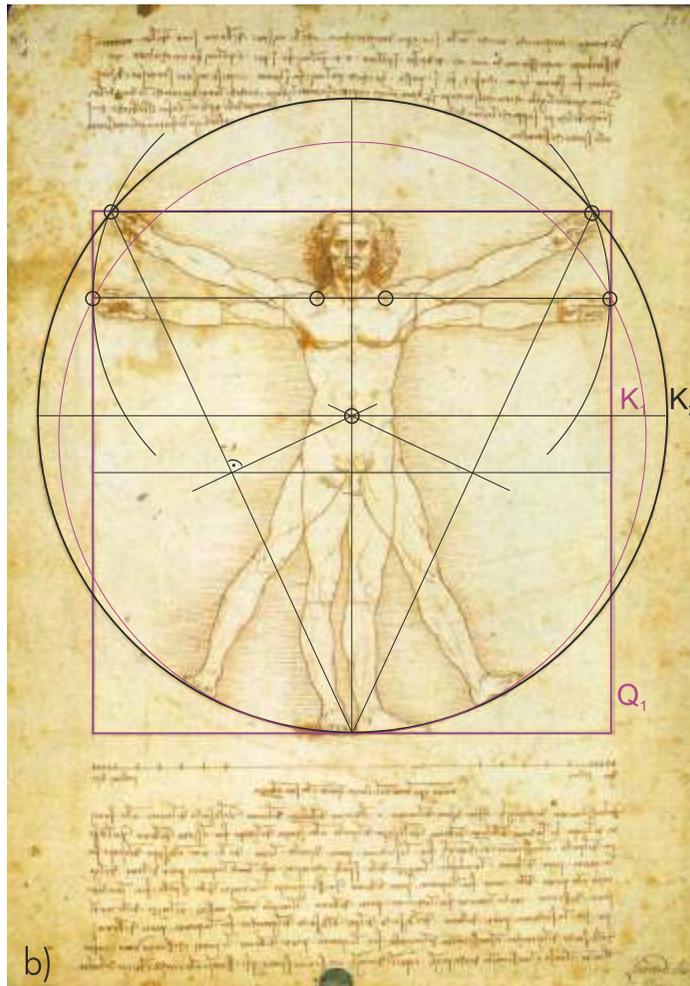
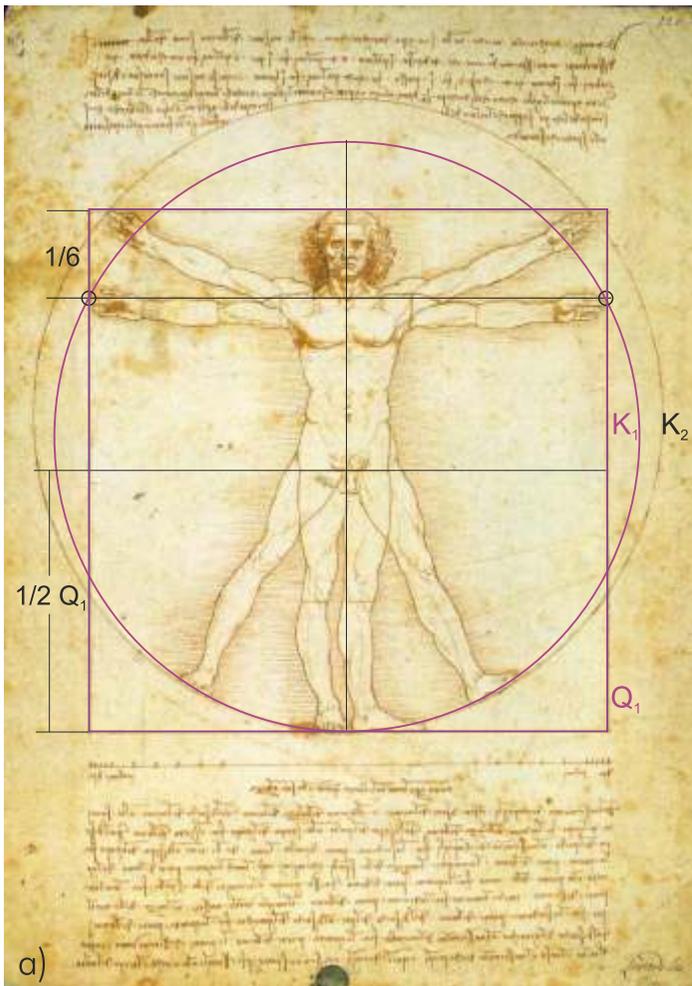
Der „Salvator Mundi“ Leonardo da Vincis, heute im Besitz des Louvre Abu Dhabi, ist ins Licht der Öffentlichkeit gerückt durch seinen spektakulären Ankauf und den Expertenstreit um die Autorschaft Leonardos. Von einigen Kunstwissenschaftlern wird das Bild als eigenhändig eingeschätzt und dabei gerne als „männliche Mona Lisa“ apostrophiert, doch gibt es auch kritische Stimmen, die von Werkstatt- oder Schülerarbeit sprechen – eine Schöpfung des Meisters bliebe es dennoch in hohem Maße. Auch angesichts älterer Schäden und umstrittener restauratorischer Maßnahmen kann dieses Bild wohl als die Leonardo da Vinci am nächsten stehende der bekannten Varianten gelten (so auch Frank Zöllner). Die hier versuchte Analyse der geometrischen Grundlage bzw. Schlüsselung kann und will solche Streitfragen nicht entscheiden, doch soll sie die hochrangige Stellung dieses Salvatorotyps im Werk Leonardos belegen: sie zeigt ein außerordentlich konsequent durchgehaltenes geometrisches Konzept auf, das nicht nur als formalistisches Gerüst zu verstehen ist, sondern dem Sinngehalt des höchst anspruchsvollen Themas ebenso gerecht wird wie dem Niveau Leonardos als Mathematiker. Untersucht man den Salvator Mundi des Louvre Abu Dhabi unter diesem Gesichtspunkt, so erweist sich die Geometrie als ein Schlüssel der Interpretation:

Frappant ist der „Fingerzeig“ der wundervoll gemalten Segenshand: Das (Christus-) Achtortsystem wird von ihr „gehalten“ und greift intensiv in den Formbestand des Bildes ein. Durch Hinzunahme des Kreisquadraturverfahrens nach dem Muster des „Vitruvianischen Mannes“ (Seite 7) entsteht so das Bild des Salvators, der den (Himmels-) Kreis „in der Hand hält“ und das (Welt-) Quadrat „im Auge behält“. Er vollzieht somit „eigenhändig“ die Vereinigung aller Gegensätze in seiner göttlichen Person.

1) zur Bauhüttengeometrie und Dürer siehe die Analysen des Verfassers als download unter: www.hans-leinberger-verein.de

2) Die „Zehn Bücher über Architektur“ des antiken Architekten Marcus Vitruvius Pollio wurden in der Renaissance viel beachtet. Den „homo ad quadratum“ und den „homo ad circulum“ beschrieb er als getrennte Figuren (ohne Abb.!).

3) Klaus Schröer / Klaus Irle, „Ich aber quadrierte den Kreis“, Münster, 1998; sowie auf youtube: Leonardos Proportionsstudie und die Quadratur des Kreises.



Die vitruvianische Proportionsfigur Leonardos – der Mensch in Quadrat und Kreis

Hinter der Proportionsfigur Leonardos verbirgt sich der Algorithmus einer Annäherung an die Kreisquadratur – eine Entdeckung, die wir Klaus Schröder verdanken :

a) Im ersten Schritt bestimmen die Mittelfinger der waagrecht ausgestreckten Arme auf der von Leonardo als Linie angegebenen „Höhe über der Brust“ ($5/6$ Quadrathöhe) die Schnittpunkte des Quadrats Q_1 mit einem zu ergänzenden Kreis K_1 , dessen Fläche der des Quadrates (beide hier violett) gleich ist (bis auf $0,3\%$). Wie aber hat Leonardo das Verhältnis des Quadrats zu seinem größte-

ren Kreis K_2 , und wie dessen Zentrum bestimmt?

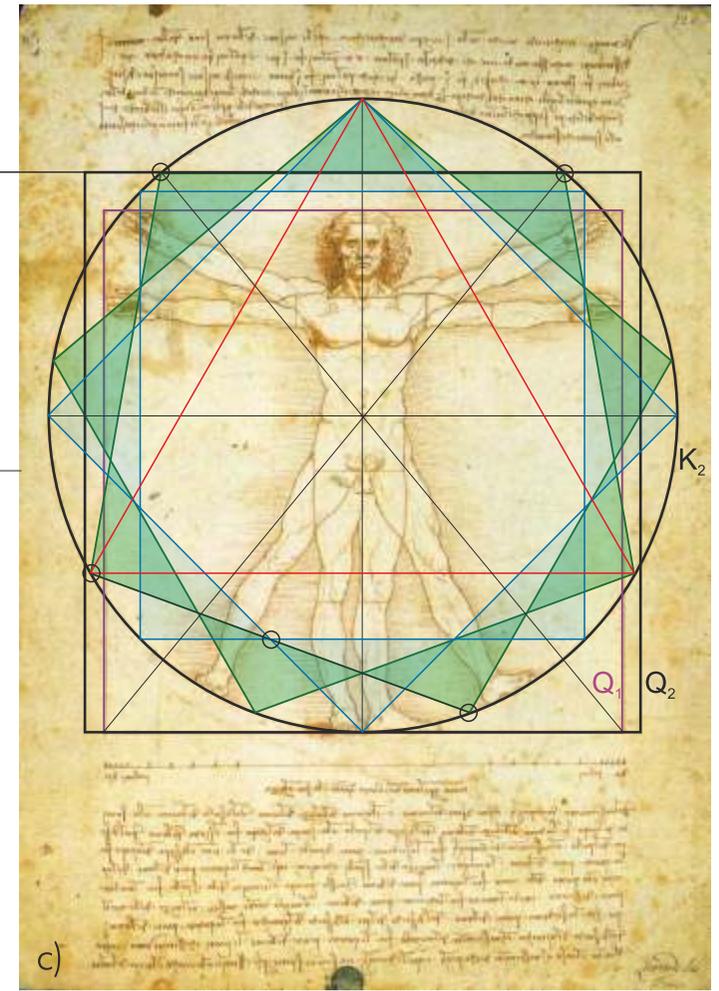
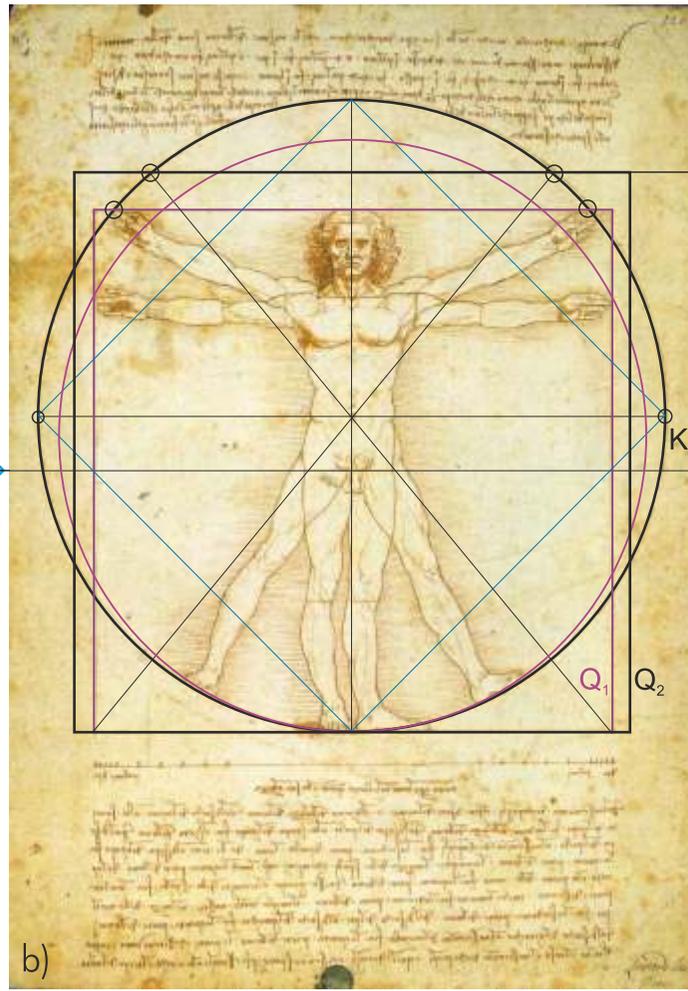
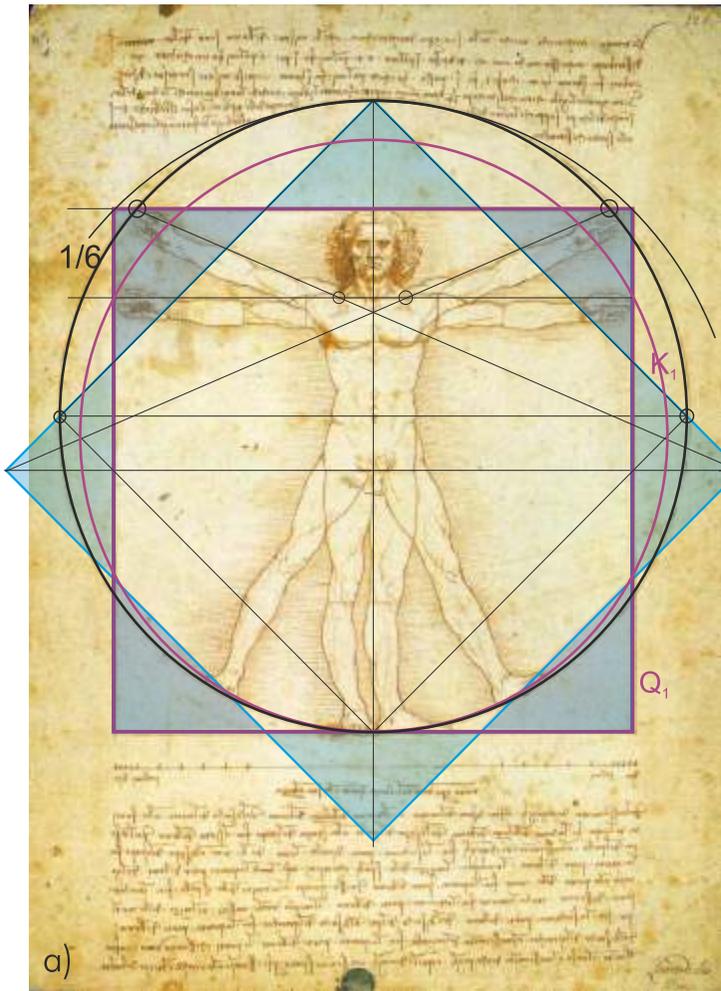
Vitruv gibt bei seinen Maßangaben für die ideale Proportion des Mannes die Höhe des Nabels nicht an, lediglich, dass dieser bei gespreizten Armen und Beinen das Zentrum eines Kreises bildet. In der Folge wurden deshalb sehr unterschiedliche Lösungen für die Nabelhöhe und für das Verhältnis von Kreis und Quadrat erprobt, zumeist mit demselben Mittelpunkt für Kreis und Quadrat – ein anatomisch fragwürdiges Unterfangen.

b) Schröder rekonstruiert Leonardos Weg, indem er die von diesem markierten Schulterpunkte nutzt und durch Abzirkeln auf der oberen Seite des gegebenen Quadrats

Q_1 die Schnittpunkte des Kreises K_2 (Mittelfinger) erzeugt .

Den Kreismittelpunkt = Nabel findet Schröder über das Dreieck Finger-Zeh-Finger. Von einer unteren Ecke des Quadrats Q_1 durch den Mittelpunkt des Kreises K_2 zieht er eine Linie bis zu einem Schnittpunkt mit dem Kreis K_2 .

c) Durch diesen wird eine Seite des Quadrats Q_2 gelegt, das nun in sehr guter Annäherung ($1,00041$) flächengleich mit diesem Kreis ist – ein neues Paar. Dieses Verfahren Schröders (Leonardos?) lässt sich rechnerisch mit unendlich vielen Schritten bis $1,00037$ optimieren; hier ist es nur stark verkürzt zitiert, ohne auf die mathematischen Berechnungen näher einzugehen (siehe dazu Anm. 3).



Alternativer Weg zur Kreisquadratur, aufgezeigt am „Vitruvianischen Mann“ Leonardo da Vincis :

a) Leonardos Quadrat Q_1 (violett) ergänzt man durch ein um 45° gekipptes Quadrat zu einem Achtort (hellblau); von der Basis des Quadrats Q_1 bis zur obersten Ecke dieses Achtorts zeichnet man den Kreis K_2 Leonardos (schwarz, 0,8% Abweichung). Dessen Mittelpunkt (Nabel) liegt auch auf der waagrechten Diagonale eines um 45° gekippten Quadrats. Die Linien von den seitlichen Achtortecken über die markierten Schulterpunkte Leonardos liefern ebenfalls Kreisschnittpunkte auf dem Quadrat Q_1 .

b) Die von den unteren Ecken dieses Q_1 aus durch

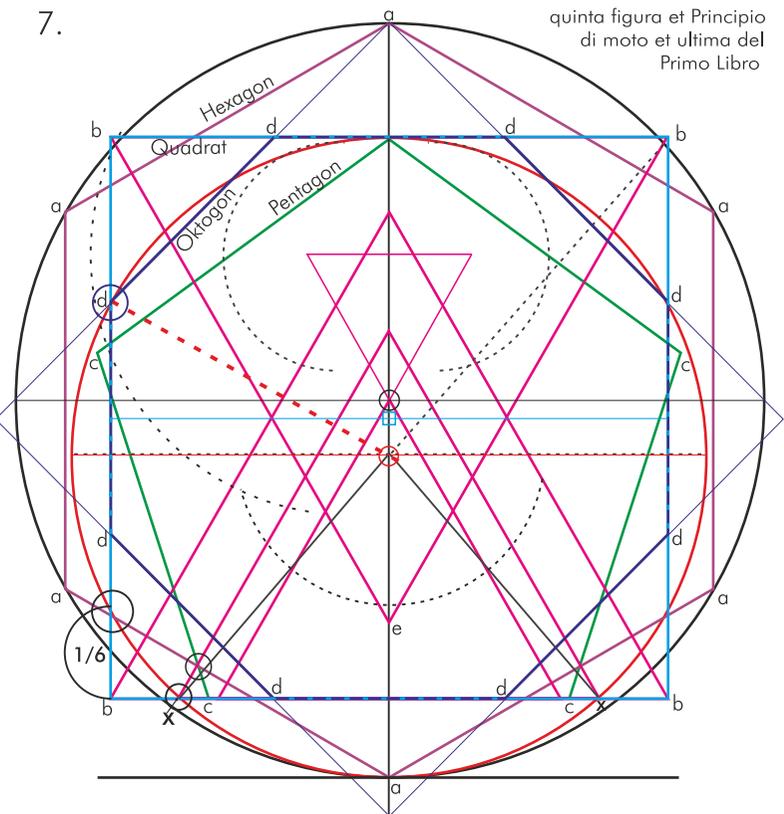
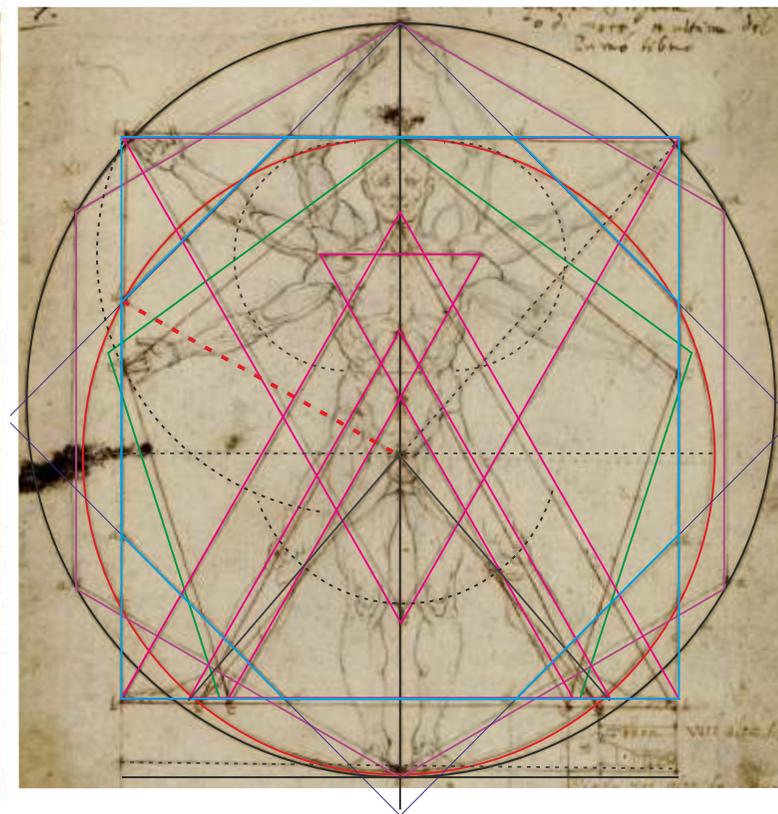
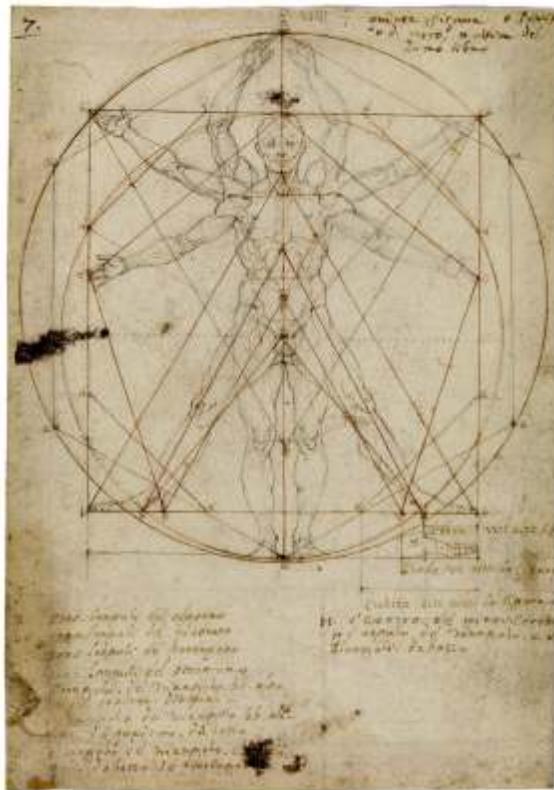
den Nabel-Mittelpunkt gezogenen Diagonalen ergeben Schnittpunkte auf Leonardos Kreis K_2 , die ein flächengleiches Quadrat Q_2 markieren mit 0,23% Abweichung.

c) Die Annäherung über einen Neunstern (grün) ist mit 0,72% nur minimal schlechter. Die verwendete Neunstern-Annäherung ergibt sich fast von selbst beim Hantieren mit gleichseitigem Dreieck (rot) und Achtort (blau). Die Optimierung der Angleichung könnte nun durchaus nach der Methode Schröers weitergeführt werden.

Die zeichnerisch von der Lösung Schröers kaum unterscheidbaren Ergebnisse haben bei weniger guter Annäherung den Vorzug, durch Zusammenführen der unter-

schiedlichen geometrischen Formen und symbolischen Bedeutungen sich dem Ideal der Koinzidenz zu nähern. Die Zeichnung auf Fol. 7 des Codex Huygens der Leonardo-Nachfolge (siehe folgende Seite) legt nahe, dass sich Leonardo auch mit solchen Gedanken befasst hat.

So will diese Studie keineswegs die Schröer'sche, mathematisch wohl bessere Lösung ersetzen, vielmehr zu bedenken geben, dass der „uomo universale“ durchaus beide Methoden als unterschiedliche Ansätze ein-und-derselben Aufgabe gekannt und bewältigt haben dürfte. Möglicherweise bildete diese Achtort/Neunstern-Methode sogar den Auftakt für den Weg Schröers/Leonardos.



Der Codex Huygens der Pierpoint Morgan Library, New York ist eine Sammlung von Zeichnungen, vorwiegend Proportions- und Bewegungsstudien, welche in den 1560er Jahren von Carlo Urbino aus Crema geschaffen wurden. Zum Teil sind es Kopien nach Zeichnungen Leonardo da Vincis aus dem Besitz von Francesco Melzi, Erbe Leonardos. Davon ist mit größter Wahrscheinlichkeit **Folio 7**⁴ die Kopie eines verlorenes Leonardo-Werkes. Diese Studie steht dem „Vitruvianischen Mann“ offensichtlich nahe, jedoch statt dessen auf die vitruvianische Essenz reduzierten Formbestand zeigt es eine auf den ersten Blick verwirrende Vielfalt von Polygonen, Kreisen und Linien. Die Polygon-Ecken sind mit Buchstaben bezeichnet, dazu im Text:

a) Hexagon, b) Quadrat, c) Pentagon, d) Oktagon und Dreiecke. Von diesen Figuren sind einige, jedoch nicht alle zur Bestimmung von Proportionen genutzt – welchen Sinn aber haben dann die „nicht genutzten“?

4) Schröder, 1997 kommentiert Fol.7, S.67 ff., S. 88 Abb., S. 96 und S. 119 f. und referiert die Positionen von Panofsky, Kemp, Braunfels Esche und Zöllner

Zunächst erscheinen nur zwei Möglichkeiten sinnvoll:
 1. (vordergründig) sie sind versuchsweise eingesetzt um ihre Eignung als Proportionierungsmittel zu erproben oder
 2. (hintergründig, kosmologisch) sie sollen den Menschen als „mikrokosmos“ im Zentrum der gegensätzlichen geometrischen Figuren darstellen. Gibt es weitere Optionen?

Ein großer Kreis mit einbeschriebenem (ungenutztem?) Hexagon umschließt den Mann in Bewegung; der kleinere Kreis und das Quadrat könnten flächengleich sein (ähnlich K_1 und Q_1 auf Seite 3 und 4.) – siehe unten.

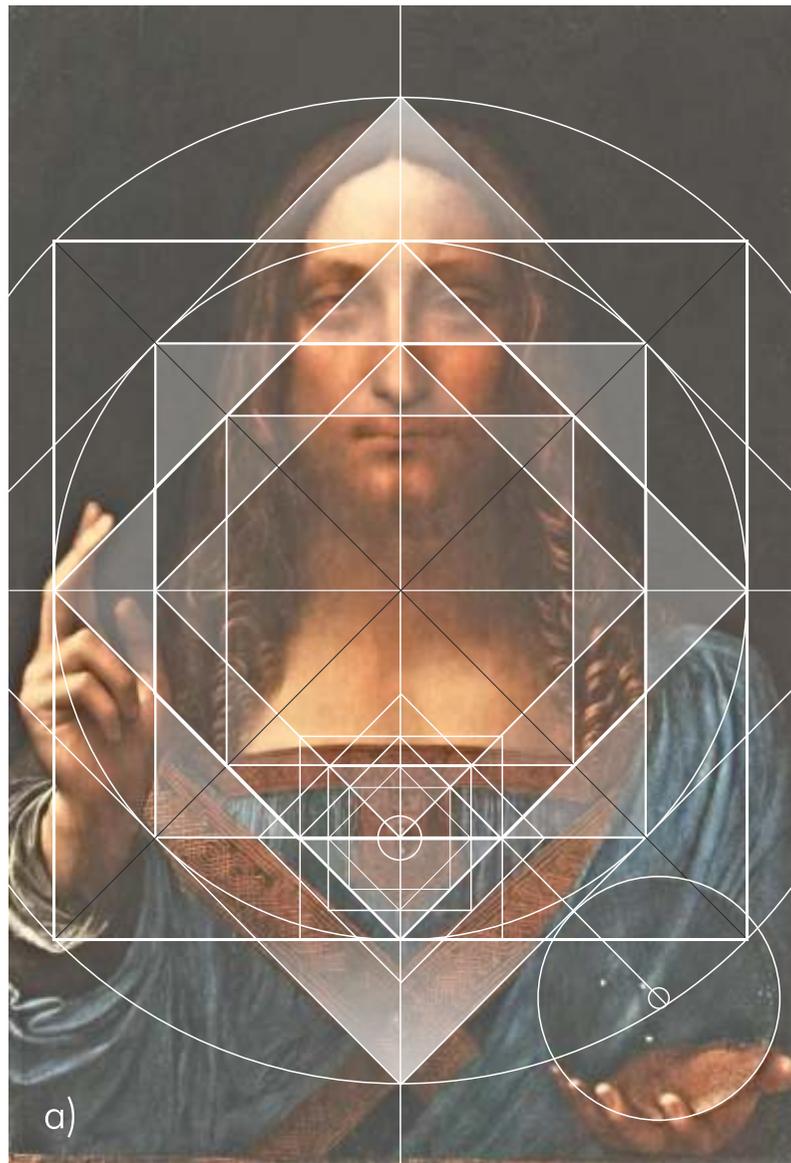
Da die Polygone hier teils gravierend verzeichnet sind, stellt sich die Frage, inwieweit ihre Übertragung zuverlässig ist – Leonardo hätte wohl nicht einmal in einer flüchtigen Skizze das Pentagon dermaßen verzogen in ein Quadrat gequetscht! In der Rekonstruktion sind die Polygone ins richtige Maß gerückt und farbig gekennzeichnet. Gestrichelte Kreise geben die Bewegungen von Ellbogen, Fingerspitzen und Knien an; auch einige Diagonale sind

angelegt. Doch während solche sowie die (zu schmalen) gleichseitigen Dreiecke die Beine markieren, gibt es für eine von der Kreismitte zu einer Oktagonenecke gezogene gestrichelte Linie (rot) keine Erklärung außer der, dass auf diesen Eckpunkt des (sonst ungenutzten?) Oktagon hingewiesen werden soll. Tatsächlich ist eben dieser ein Hilfspunkt zur Findung des flächengleichen Kreises (rot) – Annäherung zum (blauen) Quadrat: 0,57%. Hat Leonardo zusätzlich den minimal besseren 1/6-Punkt (0,3%, vgl. S. 3) zitiert? Dies muss aufgrund der Ungenauigkeit der Kopie offen bleiben. Auch das „ungenutzte“ Hexagon trifft in etwa diesen (1/6-) Schnittpunkt von Kreis und Quadrat; außerdem führt es zu einem weiteren bei „x“ über das Pentagon und ein gleichseitiges Dreieck. Ich meine, hinter all diesen Ungenauigkeiten Carlo Urbinos (?) sehen wir Leonardos Ringen, den Menschen mit der Kreisquadratur zu verbinden, wie es ihm (zuvor? später?) im „vitruvianischen Mann“ auf unübertroffene Weise gelungen ist.

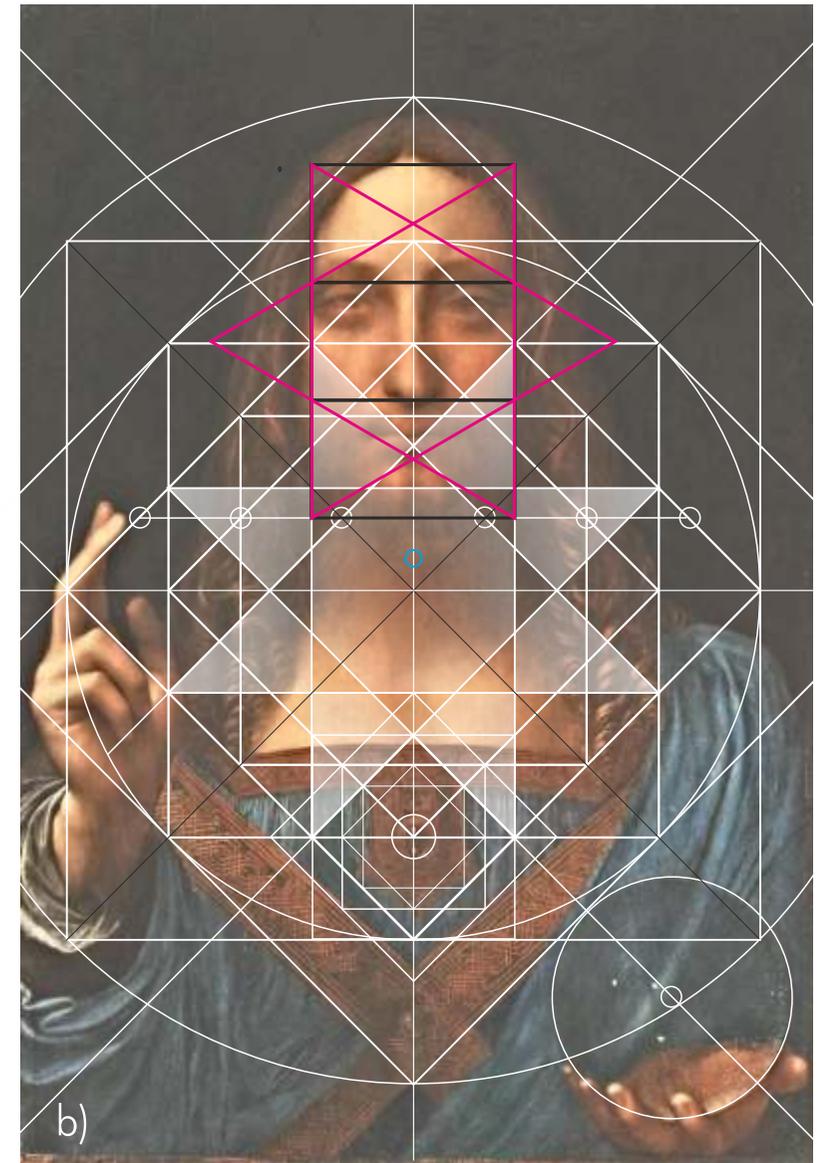


„Salvator Mundi“, Abu Dhabi, Leonardo da Vinci u. Werkstatt (?) nach 1502 – Quadrat und Kreis

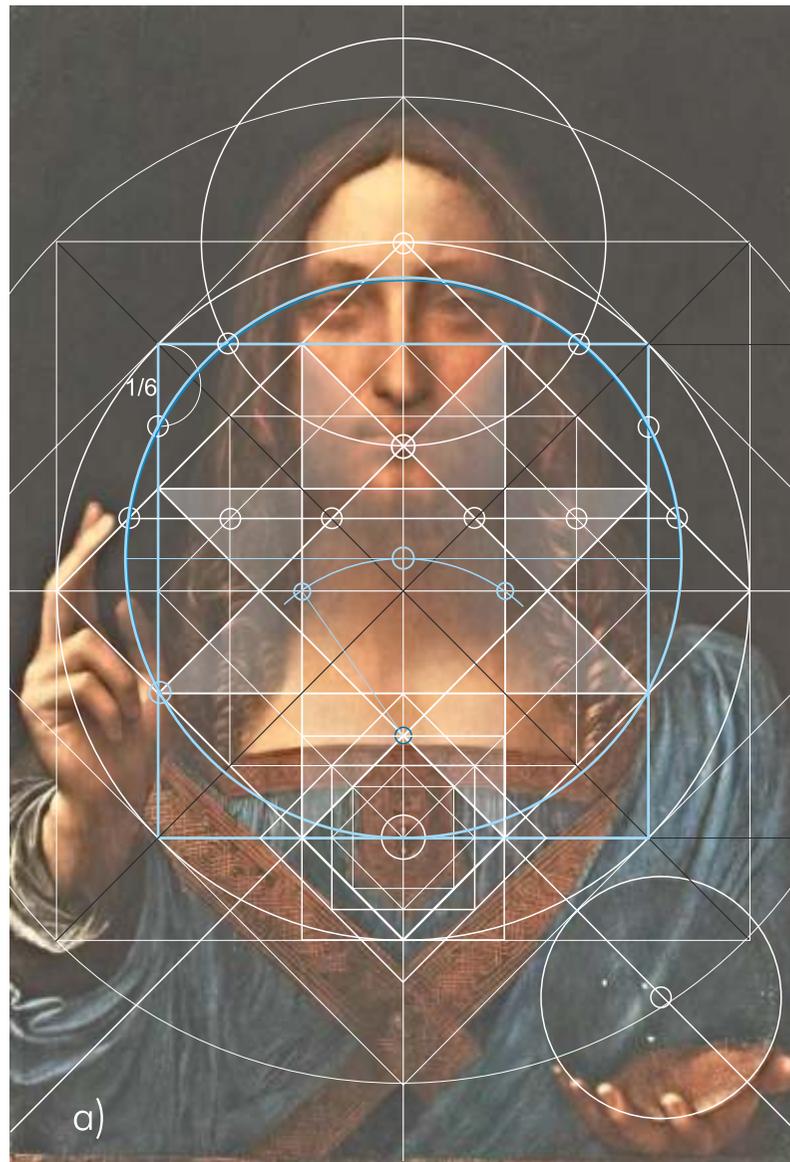
a) Leonardos „Salvator Mundi“ lässt bereits angesichts der streng symmetrischen Frontalität an eine geometrische Grundlage denken. Zudem scheinen aber auch die besondere Fingerstellung der segnenden Rechten sowie Details der Kleidung Hinweise auf eine geometrische Schlüsselfigur zu geben. Nimmt man den „Fingerzeig“ beim Wort, so verweist er auf die sogenannte „Achtort-Spinne“, ein probates zeitübliches Instrument der Proportionierung. Tatsächlich werden davon nicht nur die X-förmige Borte und der Halsausschnitt des Gewandes markiert, sondern ebenso die Augen, das Kristalljuwel auf der Brust und vor allem die Segenshand – deutliche Hinweise, mit welchen Leonardo den Achtort, dieses althergebrachte und vielgenutzte Christussymbol zitiert.



b) Anscheinend ist in diesem System auch ein „Leonardostern“ (nach Funk – weil Leonardo diesen bei Architekturskizzen verwendet hat) enthalten, ein Achtstern zweiter Ordnung, der um $22,5^\circ$ gedreht ist, so dass acht seiner Seiten ein Kreuz (!) bilden. Vermutlich sind dessen Verlängerungslinien (auf einer liegt auch das Zentrum der Sphäre) ursprünglich zur Einbindung in das Format genutzt worden – den Beschnitt der originalen Komposition (des



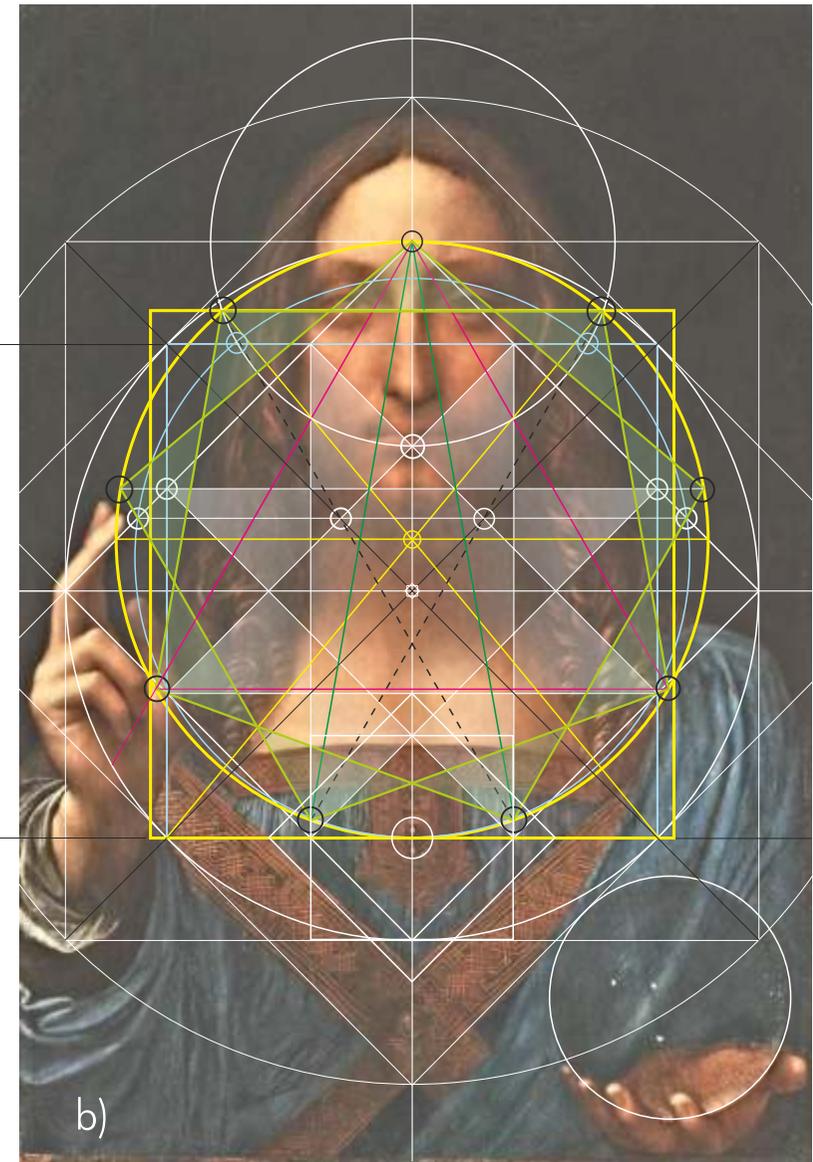
Kartons?) legt der Vergleich mit den nicht, bzw. weniger beschnittenen Versionen in Neapel und Detroit nahe (siehe Seite 8). Mittels eines Sechssterns kann der „Leonardostern“ auch die Dreiteilung des Gesichtes einleiten. Schließlich wäre angesichts des hohen thematischen Anspruchs sowie der auffällig präsenten Quadrate zu überprüfen, ob Leonardo etwa auch hier als Krönung seiner geometrischen Komposition die „Quadratur des Kreises“ im Sinn hatte.



a) Am Beginn steht das horizontal ausgerichteten Quadrat (blau), des durch die Finger markierten Achsorts. Dieses schneidet (nach Schröder, so wie beim „Vitruvianischen Mann“) in $5/6$ der Höhe ein dezentraler, annähernd flächengleicher Kreis (0,3%, blau), der auf der Basis dieses Quadrats steht. Anstatt über den $5/6$ -Punkt lässt sich dieser Kreis auch mit mehreren alternativen Schnittpunkten (weiß u. blau, 0,57%) des Achtort-Achtstern-Systems finden. Ungenauer, dafür aber sehr bedeutsam ist der Weg über den „Nimbus-Kreis“ um die Stirn Jesu und einen Achselpunkt des „Lionardosterns“ (1,3%) – leicht verbessert in b).

b) Hier beginnt man mit dem dezentralen Kreis (gelb) auf der Basis des Quadrats (blau) bis zur Spitze des zugehörigen Achsorts, so erhält man über die Kreisdiagonalen (gelb) von

den unteren Ecken des Quadrats (blau) aus die Schnittpunkte, die zum (0,23%) flächengleichen Quadrat (gelb) führen. Eine Alternative, die zu einem geringfügig ungenaueren Ergebnis (0,72%) führt, ist die Konstruktion über den Neunstern. Dessen Punkte erhält man über die Kombination Achtort/gleichseitiges Dreieck (s. S. 4) oder hier auch per „Lionardostern“. Die obere waagrechte Seite des Neunsterns gibt das flächengleiche Quadrat an. Der „Nimbuskreis“ führt hier zum (gegen a) leicht verbesserten Ergebnis (1,0%).



Welche dieser im zeichnerischen Ergebnis nahezu identischen Methoden auch verwendet wurde (alle auf wenige Promille genau), dieses (gelbe) Paar – Quadrat und Kreis – tangiert Augen, Daumen, Ring- und Mittelfinger so auffällig, dass man hierin sehr wahrscheinlich einen „Fingerzeig“ vermuten darf, mit dem Leonardo auf den Vollzug der „coincidentia oppositorum“ von Sternsystemen und Kreisquadratur durch den Salvator hingewiesen hat.

Elisabeth Arnold und Dr. Andreas Bartholomé danke ich sehr für Hilfe bei der Berechnung.

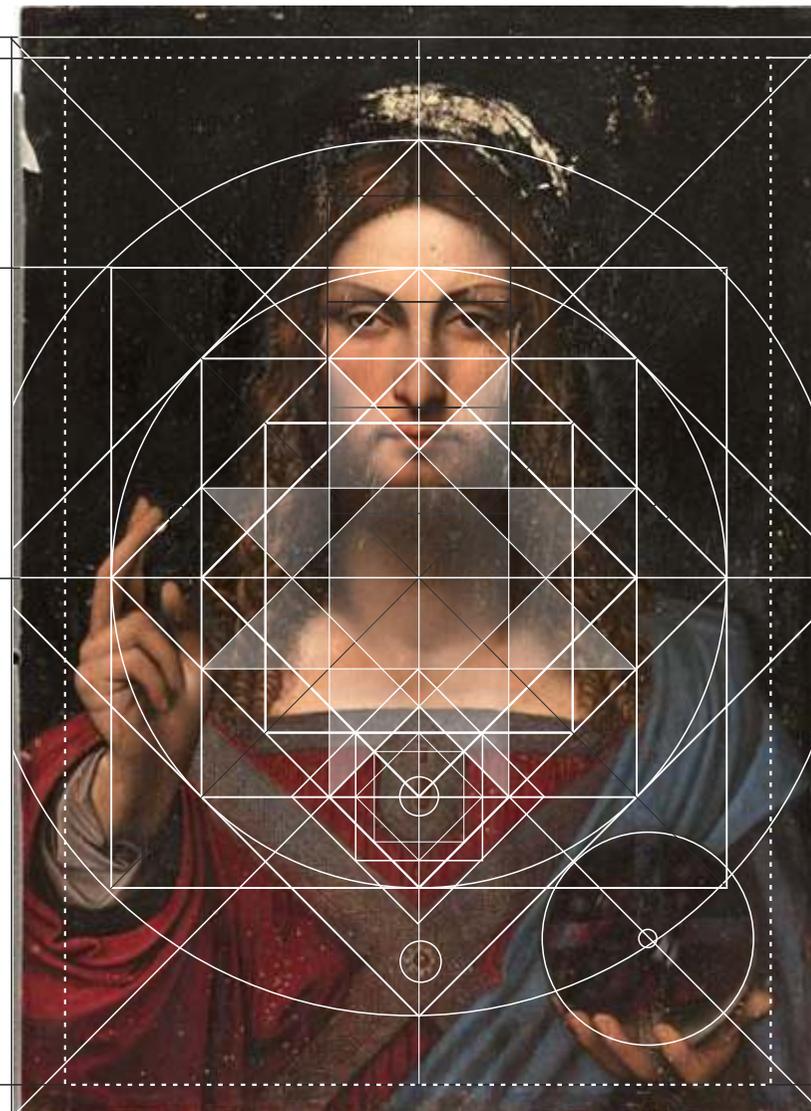
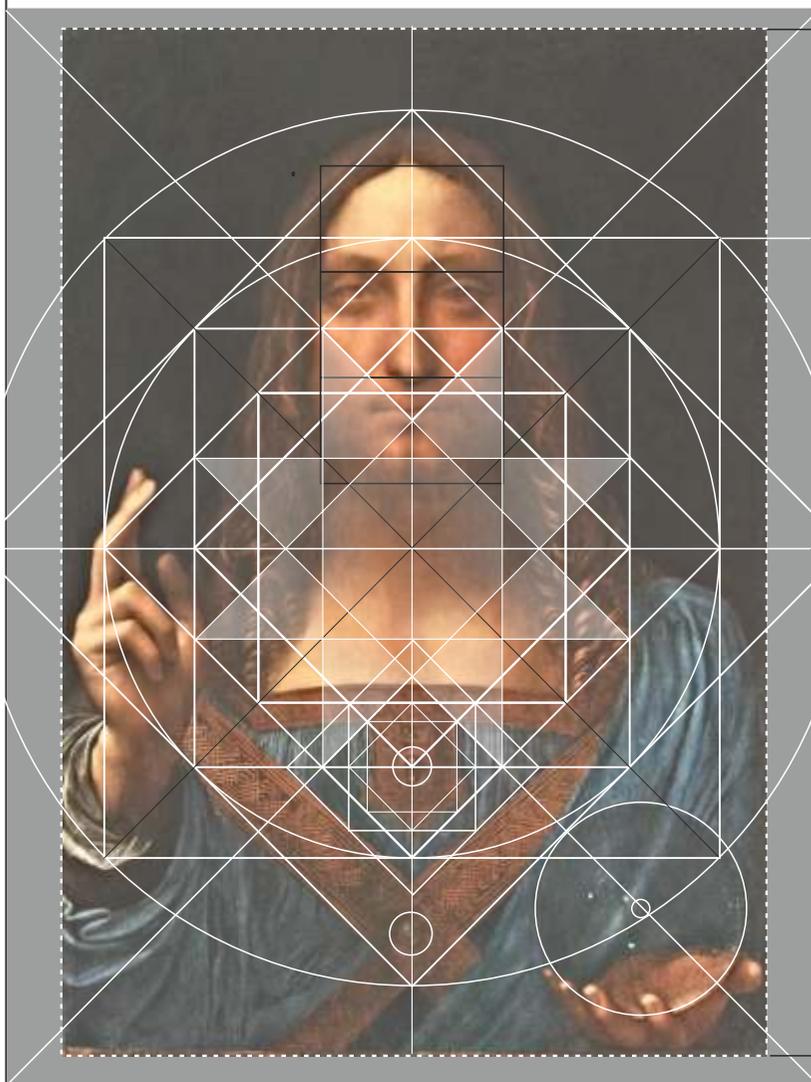


Salvator Mundi; Boltraffio?
Sammlung De Ganay, Neapel.



Salvator Mundi, Giampietrino
zugeschrieben, Detroit

Rekonstruktion der originalen Tafelabmessungen



Die Bedeutung von Leonardos „Salvator Mundi“ wird nicht zuletzt durch die Anzahl von über 20 Werkstattvarianten, Wiederholungen von Schülern sowie die Einflüsse auf spätere Maler unterstrichen. Obwohl auch die nächstähnlichen Versionen in Neapel und Detroit die Qualität der in Abu-Dhabi nicht erreichen, ist doch die erstaunlich exakte Übereinstimmung im Aufbau zu vermerken. Gegenüber dem Salvator in Abu Dhabi haben sie aber den Vorzug nicht bzw. weniger beschnitten zu sein. Denn dass letzterer die ursprüngliche Komposition nur beschnitten wiedergibt, das bezeugen schon die störende Randnähe der Segenshand mit angeschnittener Ärmelöffnung sowie die auffällige Enge an der Linken, deren Daumen sogar etwas verkürzt wurde, wie es etwa der Vergleich mit dem Salvator in Neapel belegt.

Frappant ist dessen Übereinstimmung bis ins Detail mit dem erschlossenen Achternsystem des Abu-Dhabi-Salvators. Es ist denkbar, dass der Kopist eben dasselbe System der Proportionierung und Formgebung auch als Hilfsmittel des Kopiervorgangs genutzt hat. Dass die vom „Lionardostern“ ausgehenden Verlängerungslinien die (unteren) Formatecken (Neapel) treffen, bestätigt meine Rekonstruktion ebenso wie die Konsequenz der komplexen geometrischen Komposition – und zumindest diese stammt zweifelsfrei von Leonardo da Vinci.